ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ
2022
2023

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΑΦΕΤΗΡΙΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΤΑΞΗ / ΤΜΗΜΑ : Β ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ : ΜΑΪΟΣ 2023**

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ : 2 ΩΡΕΣ**

## ΘΕΜΑ Α

**$A_1$** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C με κέντρο το σημείο Κ(0, 0) και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $C : x^2 + y^2 = \rho^2$. **(6 μονάδες)**

**$A_2$** Τι ονομάζουμε έλλειψη με εστίες τα σημείο Ε και Ε΄; **(5 μονάδες)**

**$A_3$** Τι ονομάζουμε υπερβολής με εστίες τα σημείο Ε και Ε΄; **(5 μονάδες)**

**$A_4$** Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα ε έλλειψης;
Όταν η εκκεντρότητα τείνει να γίνει 0, τι τείνει να γίνει η έλλειψη;
Όταν η εκκεντρότητα τείνει να γίνει 1, τι τείνει να γίνει η έλλειψη;
**(4 μονάδες)**

**$A_5$** Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις, ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

**α)** Η έλλειψη $C : 4x^2 + 16y^2 = 64$ έχει εστίες στον x΄x.

**β)** Στην έλλειψη $C : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ η εξίσωση της εφαπτομένης που διέρχεται από το σημείο Α(1, 1) έχει εξίσωση $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

**γ)** Η παραβολή $C : x = 4y^2$ έχει παράμετρο $p = 2$.

**δ)** Στην παραβολή $C : y^2 = 2\,p\,x$, ο αριθμός p εκφράζει την απόσταση της εστίας Ε από τη διευθετούσα δ.

**ε)** Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $C : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχουν εξίσωση $x = -\frac{\beta}{\alpha}y$ και $x = \frac{\beta}{\alpha}y$. **(5 μονάδες)**

## ΘΕΜΑ Β

**$B_1$** Δίνεται η εξίσωση $y^4 - 16x^2 = 0$ (1).

**α)** Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές $C_1 : y^2 = 4x$ και $C_2 : y^2 = -4x$ και να βρείτε για καθεμιά από αυτές την εστία και τη διευθετούσα της. **(6 μονάδες)**

**β)** Αν $E_1$ και $E_2$ είναι οι εστίες των παραβολών $C_1$ και $C_2$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $E_1E_2$. **(6 μονάδες)**

**$B_2$** Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $C_1 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

**α)** Να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες:

**ι)** Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

**ιι)** Των εστιών Ε και Ε΄ της έλλειψης. **(6 μονάδες)**

**β)** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο Α(0, 4). **(7 μονάδες)**

## ΘΕΜΑ Γ

**$Γ_1$** Δίνεται η παραβολή $C_1 : y^2 = 2px$ και η έλλειψη $C_2 : 4x^2 + 2y^2 = 3p^2$, $p > 0$.

**α)** Να δειχθεί ότι οι εστίες Ε και Ε΄ της έλλειψης είναι τα σημεία $E\left(0, \frac{\sqrt{3}\,p}{2}\right)$, $E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}\,p}{2}\right)$. **(6 μονάδες)**

**β)** Να δειχθεί ότι τα κοινά σημεία Κ και Λ των κωνικών τομών είναι τα $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και $Λ\left(\frac{p}{2}, -p\right)$. **(6 μονάδες)**

**γ)** Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι κάθετες. **(4 μονάδες)**

**$Γ_2$** Δίνεται η υπερβολή $C_1 : \frac{x^2}{α^2} - \frac{y^2}{β^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της Α και Α΄ είναι 8.

**α)** Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής. **(3 μονάδες)**

**β)** Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; **(3 μονάδες)**

**γ)** Να βρεθεί η εφαπτομένη της $C_1$ : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο της $\left(5, \frac{9}{4}\right)$.

**(3 μονάδες)**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + (2\lambda - 3)y^2 + 6(2 - \lambda)x = 16(\lambda - 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

**α)** Αν $\lambda = 1$, να δειχθεί ότι η εξίσωση παριστάνει παραβολή $C_1$ της οποίας να βρεθεί η εστία Ε και η διευθετούσα δ. **(6 μονάδες)**

**β)** Αν $\lambda = 2$, να δειχθεί ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο $C_2$ του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. **(6 μονάδες)**

**γ)** Να βρεθεί η εξίσωση και η εκκεντρότητα της έλλειψης, που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων Ο, μία εστία της κοινή με την εστία Ε της παραβολής $C_1$ και μεγάλο άξονα ίσο με την ακτίνα του κύκλου $C_2$.

**(6 μονάδες)**

**δ)** Να βρεθούν τα κοινά σημεία $P_1$ και $P_2$ των $C_1$ και $C_2$ και να δειχθεί ότι $d(P_1, \delta) - d(P_1, E) = d(P_2, \delta) - d(P_2, E)$. **(7 μονάδες)**

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**