

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ
ΤΑΞΗ / ΤΜΗΜΑ : Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ : ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2019

ΘΕΜΑ Α

A1. α. Πότε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται περιοδική;

Μονάδες 4

β. Να βρεθεί η περίοδος και τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων.

- $f : f(x) = 3\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), x \in \mathbb{R}.$

- $g : g(x) = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 10, x \in \mathbb{R}.$

Μονάδες 4

A2. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες και να αναφέρετε για ποιές τιμές των α, β ισχύουν.

- $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \dots$

- $\eta\mu(\alpha - \beta) = \dots$

- $\epsilon\varphi(\alpha + \beta) = \dots$

- $\sigma\varphi(\alpha - \beta) = \dots$

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

α. Η εξίσωση $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 2$ είναι αδύνατη στο \mathbb{R} .

Μονάδες 2

β. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι: $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x < 1$.

Μονάδες 2

γ. $\eta\mu 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Μονάδες 2

δ. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι: $\eta\mu x < \epsilon\phi x$.

Μονάδες 2

ε. Αν $\eta\mu\alpha + \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 2$ τότε $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$.

Μονάδες 2

στ. Η συνάρτηση $f : f(x) = 8\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$ έχει περίοδο $T = \pi$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

B1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι: $\eta\mu x - \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Μονάδες 5

B2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : f(x) = \eta\mu x - \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την περίοδο και τα ακρότατα της f .

Μονάδες 4

β. Για ποιές τιμές του x η f παίρνει τη μέγιστη τιμή και για ποιές την ελάχιστη τιμή.

Μονάδες 6

γ. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

Μονάδες 5

δ. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\Phi : \Phi(x) = f^2(x)$ στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$, στο ίδιο σύστημα αναφοράς στο οποίο έχετε κάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ με $\alpha, \beta, \gamma \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ να δείξετε ότι:

$$\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta + \epsilon\phi\gamma = \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta \cdot \epsilon\phi\gamma.$$

Ισχύει το αντίστροφο;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Αν όχι, τότε ποιά σχέση ισχύει για τις γωνίες α, β, γ ;

Μονάδες 10

Γ2. Να δείξετε ότι:
$$\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} = 0$$

Μονάδες 7

Γ3. Αν $\eta\mu x + \eta\mu y = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y = -1$ να δείξετε ότι:

α. $\sigma\upsilon\nu(x+y) = 0$

Μονάδες 6

β. $x + y = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να δείξετε ότι:
$$\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

Για ποιές τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει η παραπάνω ισότητα.

Μονάδες 10

Δ2. Έστω συνάρτηση $f : f(x) = \sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}.$

α. Να δείξετε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}.$

Μονάδες 3

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η f παίρνει τη μορφή $f(x) = \sqrt{2} \cdot |\sigma\upsilon\nu x|$

Μονάδες 3

γ. Να γίνει η γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2\pi].$

Μονάδες 6

δ. Με τη βοήθεια της C_f να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο της f καθώς και τις τιμές του $x \in [0, 2\pi]$ στις οποίες η f παίρνει τη μέγιστη τιμή.

Μονάδες 3

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ