ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ σωτ ΑΦΕΤΗΡΙΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ / ΤΜΗΜΑ : Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ : ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : 4

ΘΕΜΑ Α :

Α1. Έστω συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$, όπου το Δ είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

α. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]\subseteq\Delta$;

β. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\Delta$;

γ. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]\subseteq\Delta$;

δ. Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της f ή απλά παράγωγο συνάρτηση της f ;

Μονάδες 8

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 3

Α3. Έστω συνάρτηση $f: f(x)=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$.

α. Να δείξετε ότι η f δεν παραγωγίζεται στη θέση $x_0=0$.

β. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, x\in(0,+\infty) .$$

Μονάδες 6

Α4. Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f'(x_0)=0$ τότε υποχρεωτικά η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδα 1

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

Μονάδα 1

Α5. Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι πολυωνυμική 4ου βαθμού τότε είναι πιθανό η C_f να έχει ένα μόνο σημείο καμπής»

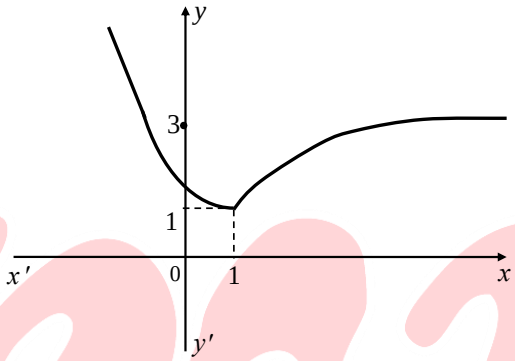
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδα 1

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

Μονάδες 2

Α6. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f'.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Β :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να μελετήσετε την f προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Β2. Να εξετάσετε αν η f παρουσιάζει ολικά ακρότατα.

Μονάδες 7

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: g(x)=ln\left(x^2+1\right), x\in\mathbb{R}$.

Β3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=3x-1$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ η οποία ανήκει στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 6

Β4. Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι: $ln\left(\lambda^2+2\lambda+2\right)\geq g(\lambda)-1$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: f(x)=\ln x-\alpha x, x\in(0,+\infty)$, όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Αν $\alpha=1$ τότε:

Γ2. Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής τη συνάρτηση $g: g(x)=\dfrac{f(x)}{x}, x\in(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε το $I=\int_1^e g(x)dx$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε την ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\Phi: \Phi(x)=g(x)+x+2, x\in(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ :

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

- $\int_1^{f(1)} e^{t^8}dt=0$
- $f'(x)\left(x^2-2x+2\right)+f(x)(2x-2)=3(x-1)^2+2(x-1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι : $f(1)=1$.

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι : $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{x^2-2x+2}+1, x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον αριθμό $f^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

Μονάδες 7

Δ4. **α.** Να δείξετε ότι : $f(x)+f(2-x)=2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

β. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση :

$f(\eta\mu^2 x)+f(1+\sigma\upsilon\nu^2 x)=2f(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$.

Μονάδες 4

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!