

## ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ

ΤΑΞΗ / ΤΜΗΜΑ : Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ : ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2023

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ : 2 ΩΡΕΣ

## ΘΕΜΑ Α

- A<sub>1</sub> Να δείξετε ότι: Αν  $0 < \alpha \neq 1$ , τότε για κάθε  $\theta_1, \theta_2$ , με  $\theta_1 > 0$  και  $\theta_2 > 0$  ισχύει:

$$\log_{\alpha}(\theta_1 \theta_2) = \log_{\alpha}\theta_1 + \log_{\alpha}\theta_2$$

Μονάδες 6

- A<sub>2</sub> Θεωρούμε την συνάρτηση  $f : f(x) = \log_{\alpha}x$ , με  $x > 0$  και  $0 < \alpha \neq 1$ .

- ι) Πότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ ;
- ιι) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της  $f$ ;
- ιιι) Να γίνει η γραφική παράσταση της  $f$ , για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

Μονάδες 5

- A<sub>3</sub> Δίνεται η συνάρτηση  $f : f(x) = \log_{\frac{1}{e}}x$ .

Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λάθος (**Λ**) τις προτάσεις:

- 1) Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .
- 2) Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- 3) Η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ως ασύμπτωτη το θετικό ημιάξονα  $Oy$ .
- 4)  $f(e) = 1$
- 5) Το σημείο  $A(0, 1)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ .
- 6) Το σημείο  $B(1, 0)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ .
- 7) Ισχύει ότι  $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3})$ .

Μονάδες 7

- A<sub>4</sub> Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λάθος (**Λ**) τις προτάσεις:

- 1) Αν  $0 < \alpha \neq 1$ , τότε για οποιοδήποτε  $\theta > 0$  και  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $(\log_{\alpha}\theta)^x = x \log_{\alpha}\theta$
- 2) Για οποιοδήποτε  $\theta > 0$  ισχύει  $\log\theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$
- 3) Για κάθε θετικό αριθμό  $\theta$  ισχύει ότι  $e^{\ln\theta} = \theta$ .
- 4) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ , ισχύει  $\ln x^2 = 2 \ln x$ .

Μονάδες 4

**A<sub>5</sub>** Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας στις παρακάτω ισότητες, τα κενά που σημειώνονται:

- 1)  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\dots}$  όπου  $a > 0$ ,  $m$  ακέραιος και  $n$  θετικός ακέραιος.
- 2)  $a^{\log_a \theta} = \dots$  όπου  $\theta > 0$  και  $a > 0$ , με  $a \neq 1$ .
- 3)  $\log_a a^x = \dots$  όπου  $a > 0$ , με  $a \neq 1$  και  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 3**

### ΘΕΜΑ Β

**B<sub>1</sub>** Δίνεται η παράσταση  $A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta$  όπου  $\alpha, \beta$  θετικοί αριθμοί.

ι) Να δειχθεί ότι  $A = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$ .

ιι) Αν για τους αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει  $3\alpha = 16\beta$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A$ .

**Μονάδες 5**

**B<sub>2</sub>** Δίνεται η συνάρτηση  $f : f(x) = \ln(x + 2)$ .

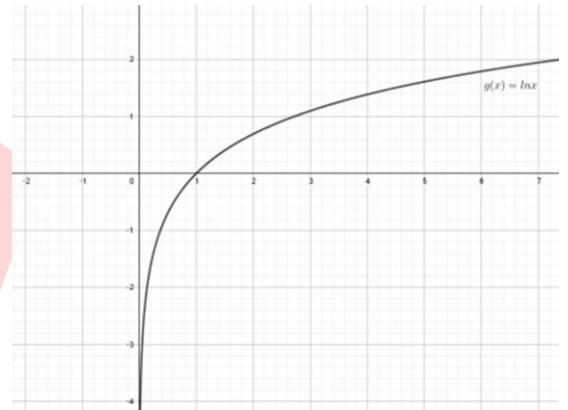
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

β) Να βρείτε το σημείο τομής της  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$ .

γ) Να βρείτε τα σημεία της  $C_f$  που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

δ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με  $g(x) = \ln x$ .

Να χαράξετε τη  $C_f$  μετατοπίζοντας κατάλληλα την  $C_g$ .



**Μονάδες 12**

**B<sub>3</sub>** Να λυθούν οι ανισώσεις:

α)  $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$

β)  $\ln x < 1$

γ)  $\log(x - 1) > 2$

δ)  $2 \ln^2 x - 3 \ln x + 1 < 0$

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ<sub>1</sub>** Έστω συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \ln(e^x - 1)$ .

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

β) Να βρεθούν οι τιμές του  $x \in (0, +\infty)$  για τις οποίες ισχύει  $f(x) > 0$ .

γ) Να λυθεί η εξίσωση  $f(2x) - f(x) = 2 \ln 2$ .

**Μονάδες 13**

Γ<sub>2</sub> Να λυθούν οι εξισώσεις:

α)  $\log(x + 1) = \log(1 - x)$

β)  $\log(x + 1) = 1 + \log(1 - x)$

γ)  $2 \log(2x - 1) - \log(3x - 2x^2) = \log(4x - 3) - \log x.$

**Μονάδες 12**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right).$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f.$

**Μονάδες 5**

β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή.

**Μονάδες 5**

γ) Να συγκριθούν οι αριθμοί  $f(0)$  και  $f\left(\frac{1}{3}\right).$

**Μονάδες 4**

δ) Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) + f(x + 1) = 0.$

**Μονάδες 5**

ε) Να λυθεί η ανίσωση  $f(x) > 0.$

**Μονάδες 6**

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**