ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΑΞΗ / ΤΜΗΜΑ : Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ : ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ 1ο :

Α. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος $\mathcal{C}$ με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.

Μονάδες 8

Β. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

1. Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι: $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.
2. Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι: $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$.
3. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.
4. Η ευθεία με εξίσωση $x = 2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 0.
5. Η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι $x x_1 + y y_1 = \rho$.
6. Η ακτίνα του κύκλου $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ είναι ίση με $\frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{4}$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 2ο :

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι:

$$|\vec{\alpha}| = 4 \text{ και } |\vec{\beta}| = 5, \quad (3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 3.$$

α) Να αποδείξετε ότι το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10$.

Μονάδες 5

β) Να προσδιορίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 5

γ) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$. Να βρείτε:

i. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

ii. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$.

iii. Τον αριθμό $\kappa \in \mathbb{R}$ τέτοιον ώστε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους, όπου: $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + (\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta})\vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο :

Α) Δίνεται η εξίσωση $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 8\mathrm{x} + 10\mathrm{y} + 41\kappa = 0$. Η τιμή του κ για την οποία η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο είναι:

Α. $\kappa > 1$ Β. $\kappa < 1$ Γ. $\kappa = 1$ Δ. $\kappa \in \mathbb{R}$ Ε. δεν υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

Β) Δίνεται ο κύκλος (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 19 = 0$. Να βρείτε:

α/ το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου

β/ την εξίσωση του κύκλου (C_1), ο οποίος είναι ομόκεντρος με τον κύκλο (C) και εφάπτεται στην ευθεία (ε): $3x - 4y + 24 = 0$.

Μονάδες 10

Γ) Θεωρούμε τον κύκλο (C): $(\mathrm{x} - 2)^2 + (\mathrm{y} + 2)^2 = 16$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του (C) που:

i. διέρχονται από το σημείο Γ(7, 2),

ii. είναι παράλληλες στην ευθεία (ε): $4x - 3y = 5$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ $4^{ο}$:

Δίνονται τα σημεία Α(1, 1) και Β(−7, −5) και η ευθεία (ε): $9x - 2y + 23 = 0$.

α) Να δείξετε ότι τα σημεία Α και Β ισαπέχουν από την ευθεία (ε).

Μονάδες 4

β) Θεωρούμε επίσης το σημείο Γ της ευθείας (ε) ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ να έχει συντελεστή διεύθυνσης −3. Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

Μονάδες 7

ii. Αν Γ(−1, 7) τότε να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 4

iii. Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 3

iv. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 3

v. Τη γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!