

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΑΞΗ / ΤΜΗΜΑ : Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ : ΜΑΡΤΙΟΣ 2023

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ : 2 ΩΡΕΣ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A₁** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$. **(6 μονάδες)**
- A₂** Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη του κύκλου C με εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $x_1 x + y_1 y = \rho^2$. **(8 μονάδες)**
- A₃** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο του $M(1, -3)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο M έχει εξίσωση:
 A: $x + 3y = 10$ B: $5x - y = 8$ Γ: $x - 3y = 10$ Δ: $3x + 2y = 3$ E: $\frac{1}{2}x + y = 5$
(3 μονάδες)
- A₄** Τι ονομάζουμε παραβολή με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ; **(4 μονάδες)**
- A₅** Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις, ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).
α) Η εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$, με $\rho \in \mathbb{R}$ παριστάνει κύκλο με ακτίνα ρ .
β) Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$, τότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.
γ) Αν το σημείο $M(\alpha, \beta)$ διαφορετικό του $O(0, 0)$ ανήκει στην παραβολή $C : x^2 = 2\rho y$, τότε στην παραβολή ανήκει και το σημείο $N(-\alpha, \beta)$.
δ) Η εφαπτομένη της παραβολής $C : y^2 = 2\rho x$ σε ένα σημείο της $M(x_0, y_0)$ διαφορετικό του $O(0, 0)$, έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $-\frac{\rho}{y_0}$.
(4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

- B₁** Θεωρούμε τον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 9$ και τα σημεία $A(-2, \sqrt{5})$ και $B(3, 1)$.
- ι)** Ναδειχθεί ότι το σημείο A βρίσκεται πάνω στον κύκλο C ενώ το σημείο B έξω από τον κύκλο C . **(4 μονάδες)**
 - ιι)** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης που φέρνουμε στο σημείο A . **(3 μονάδες)**
 - ιιι)** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου, που διέρχονται από το σημείο B . **(8 μονάδες)**
- B₂** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\cos\theta x - 2\eta\mu\theta y - 1 = 0, 0 \leq \theta < 2\pi$.
- ι)** Ναδειχθεί ότι για κάθε θ , η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα. **(5 μονάδες)**
 - ιι)** Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1, 2)$. **(5 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραβολή $x^2 = 4y$. Να βρεθεί:

- ι)** η εστία και η διευθετούσα της παραβολής. **(4 μονάδες)**
- ιι)** η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που διέρχεται από το σημείο $A(-1, -2)$. **(7 μονάδες)**
- ιιι)** η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\phi = 135^\circ$. **(7 μονάδες)**
- ιιιι)** η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $x + y + 7 = 0$. **(7 μονάδες)**

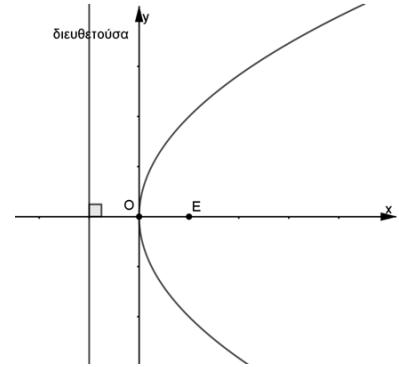
ΘΕΜΑ Δ

- Δ₁** Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο $O(0, 0)$ θεωρούμε τους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με εξισώσεις $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ (1) και $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ (2) αντίστοιχα.
- α)** Να βρεθούν τα κέντρα και οι ακτίνες των δύο κύκλων. **(4 μονάδες)**

β) Ναδειχθεί ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.
(4 μονάδες)

γ) Έστω M, N τυχαία σημεία των κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων M και N .
(4 μονάδες)

Δ₂ Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον $x'x$. Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η $E(2, 0)$, η διευθετούσα της είναι η $\delta : x = -2$ και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2 = 8x$.

(6 μονάδες)

β) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2, 4)$ είναι η $\epsilon : y = x + 2$.
(2 μονάδες)

γ) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ϵ στο σημείο της $A(2, 4)$.

(5 μονάδες)

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!