ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΑΞΗ / ΤΜΗΜΑ : Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ : ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ : ΤΡΕΙΣ ΩΡΕΣ (18:00 – 21:00)

ΘΕΜΑ Α

Α1] Έστω συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$.

α] Πότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο $x_0\in\Delta$ και τι ονομάζουμε παράγωγο της f στη θέση x_0 .

Μονάδες 2

β] Να δώσετε τον ορισμό της συνάρτησης της πρώτης παραγώγου της f ή απλά της παραγώγου συνάρτησης της f .

Μονάδες 3

Α2] Έστω συνάρτηση $f:f(x)=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$.

α] Να δείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Μονάδες 3

β] Να δείξετε ότι η f παραγωγίζεται σε κάθε $x_0\in(0,+\infty)$ με $f':f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Μονάδες 3

Α3] Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 3

Α4] Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : «Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$.
Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f δεν παρουσιάζει κανένα τοπικό ακρότατο».

α] Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδα 1

Β] Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

Μονάδες 2

Α5] Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α] Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση f, νιοστού βαθμού με $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι η συνάρτηση f' είναι $(\nu-1)$ βαθμού.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 2

β] Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_0)=0$.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 2

γ] Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ με $f(\alpha)=f(\beta)$. Τότε η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 2

δ] Αν μια συνάρτηση $f:\Delta \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ και $f'(x_0)=0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Έστω πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μη σταθερή τέτοια ώστε :

- $\left(f'(x)\right)^2 = 4f(x)+4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες άνισες τις κ,λ με $\kappa<\lambda$.

Β1] Να δικαιολογήσετε ότι η f είναι μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma, x \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$.

Μονάδες 4

Β2] Να δείξετε ότι : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x-\kappa} + \dfrac{1}{x-\lambda}$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{\kappa,\lambda\}$.

Μονάδες 5

Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x_0=2$ τότε :

Β3] Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-4x+3, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Β4] Να βρεθούν οι εφαπτόμενες ευθείες της C_f οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(2,-2)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρήστε τη συνάρτηση $f: f(x)=4\cdot\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$.

Γ1] Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=\lambda x+\lambda$ να εφάπτεται της C_f . Ποιό είναι το σημείο επαφής της (ε) με τη C_f ;

Μονάδες 6

Αν $\lambda=2$ **τότε :**

Γ2] Θεωρούμε ένα σημείο P το οποίο κινείται κατά μήκος της C_f ώστε η τετμημένη του P να αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής $0{,}5$ μονάδες ανά δευτερόλεπτο.

α] Αν A είναι το σημείο τομής της ευθείας (ε) που βρήκατε στο Γ1 ερώτημα με τον άξονα $y'y$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAP όταν το P διέρχεται από το σημείο $M(1,4)$.

Μονάδες 3

β] Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του P από το O όταν το P διέρχεται από το σημείο $M(1,4)$.

Μονάδες 5

Γ3] Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: g(x)=\begin{cases} e^x\cdot \eta\mu x, \alpha\nu\ x\in\left[-\dfrac{3\pi}{2},0\right) \\ f(x), \alpha\nu\ x\in[0,+\infty) \end{cases}$.

Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της g και τις θέσεις των πιθανών ακροτάτων της g .

Μονάδες 5

Γ4] Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

α] $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f^2(x)\cdot \ln x\right)$

β] $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)\cdot \ln x\right)$

γ] $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\eta\mu x\cdot \ln x\right)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: f(x)=3x^4+\alpha x^3+\beta x^2-36x+22,\ x\in\mathbb{R}$, όπου α,β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_0=1$ ίσο με -1 τότε :

Δ1] Να δείξετε ότι : $\alpha=4$ και $\beta=6$.

Μονάδες 6

Δ2] Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$ τις ρ_1,ρ_2 όπου $0<\rho_1<1<\rho_2$.

Μονάδες 8

Δ3] Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)\cdot\eta\mu x+f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1,ρ_2) .

Μονάδες 5

Δ4] **α]** Έστω $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ με $\kappa<\lambda$ ώστε $f(\kappa)=f(\lambda)$. Να δείξετε ότι : $\kappa<1<\lambda$.

Μονάδες 3

β] Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+\kappa\cdot f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1,ρ_2) , για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!