



ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ
ΤΑΞΗ / ΤΜΗΜΑ : Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ : ΜΑΡΤΙΟΥ 2023
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ : ΔΥΟ ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1]** α] Να δώσετε τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης με βάση α , όπου $0 < \alpha \neq 1$ (μονάδες 3).
β] Ποια συνάρτηση f ονομάζεται εκθετική (μονάδα 1).

Μονάδες 4

- A2]** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : f(x) = \alpha^x$ με $x \in \mathbb{R}$ και $0 < \alpha \neq 1$.
α] Πότε η f είναι γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} ;
β] Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ;
γ] Να γίνει η γραφική παράσταση της f , για $\alpha \in (0,1)$ και για $\alpha \in (1,+\infty)$.

Μονάδες 6

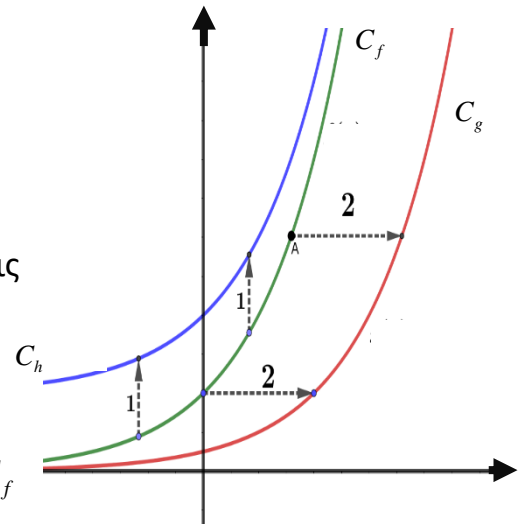
- A3]** Δίνεται η συνάρτηση $f : f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$.

Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- α] Η f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .
β] Η f έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} .
γ] Η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
δ] Η γραφική παράσταση της f έχει ως ασύμπτωτη το θετικό ημίαξονα $0x$.
ε] Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g : g(x) = e^x$, ως προς τον άξονα $y'y$.
στ] Το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .
ζ] Το σημείο $B(1,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .
η] Ισχύει ότι: $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3})$.

Μονάδες 8

A4] Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f : f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων g και h , που προέκυψαν από μετατοπίσεις της C_f .



α] Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι C_g και C_h από την C_f .

β] Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων g και h .

γ] Να βρείτε την τετμημένη του σημείου A της C_f του οποίου η τεταγμένη είναι 16.

δ] Να βρείτε την τετμημένη του σημείου B της C_g το οποίο έχει τεταγμένη $\frac{1}{8}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Β

B1] Να σχεδιάσετε, στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f : f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$, $g : g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ και $h : h(x) = 2^x + e^x, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

B2] Δίνεται η συνάρτηση $f : f(x) = \alpha 2^x + \beta$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α] Να δείξετε ότι $\alpha = 5$ και $\beta = -7$ (μονάδες 5).

β] Να βρείτε το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα $y'y$ (μονάδες 2).

γ] Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} (μονάδες 3).

δ] Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$ (μονάδες 6).

Μονάδες 16

B3] Να λύσετε την εξίσωση: $3 \cdot 2^{x+1} = 16 \cdot 3^{x-2}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2$ όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός. Δίνεται ότι, το πολυώνυμο $P(x)$ όταν διαιρεθεί με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο: $U=4$.

Γ1] Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

Μονάδες 5

Γ2] Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 + x + 1$. Να δείξετε ότι το πηλίκο $\Pi(x)$ και το υπόλοιπο $U(x)$ της διαίρεσης $P(x):Q(x)$ είναι:
 $\Pi(x) = x+1$ και $U(x) = -3x+1$.

Μονάδες 6

Γ3] Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{P(x)+x-2}{Q(x)} \geq 1$.

Μονάδες 8

Γ4] Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{Q(x)} = U(x)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δ1] Να λύσετε στο $(0, +\infty)$ την εξίσωση: $x^{x^2-2} = x^{5x-8}$.

Μονάδες 6

Δ2] Έστω η συνάρτηση $f: f(x) = \left(\frac{\alpha+2}{2\alpha-1}\right)^x, x \in \mathbb{R}$.

α] Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 6

β] Αν $\alpha=8$, να δείξετε ότι $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x, x \in \mathbb{R}$ και να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x) + f(x+1) < \frac{15}{4}.$$

Μονάδες 6

Δ3] Να λύσετε την εξίσωση: $2^x + 7 \cdot x = 9$.

Μονάδες 7

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!